المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الرباط سلا زمور زعير نيابة سـلا	الامتحان التجريبي الموحد للسنة الثانية من سلك البكالوريا دورة مـــاي 2010	الصفحة $\frac{1}{3}$

المادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعب(ة) أو المسلك :	العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز:	4

التمرين 1: (3 ن) **يسمح باستعمال الآلة الحاسبة**

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}y & x-y\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} / (x,y)\in IR^2\right\}$ ونضع: $E^*=E\setminus\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

0.5 **1)** بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathrm{M}_2(IR);+)$.

0.5 **2)** بين أن $(E;\times)$ جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(IR),\times)$.

3) نعتبر التطبيق: $\begin{array}{l}\varphi : C\to E\\ \quad x+iy\mapsto M(x,y)\end{array}$

0.75 أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$ وحدد مماثل كل عنصر من E^* .

0.75 **ب)** استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0.5 **ج)** نضع $A=M(1,1)$ ، بين أن $A^n=2^{\frac{n}{2}}M(\cos(\frac{n\pi}{4}),\sin(\frac{n\pi}{4}))$ $(\forall n\in IN^*)$,

التمرين الثاني (4 ن)

I) نعتبر في المجموعة C المعادلة : $(E): z^2-\alpha(1+i)z+i\alpha^2=0$ حيث α عدد عقدي معلوم

0.5 **1)** حل المعادلة (E).

0.5 **2)** نفترض أن $\alpha=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in]0;\pi[$ اكتب z_1+1 و z_2+1 على الشكل المثلثي حيث z_1 و z_2 هما حلا المعادلة (E) .

II) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر النقطة $A(\alpha)$ و التطبيق F الذي يربط كل نقطة M ذات اللحق z بالنقطة M' ذات اللحق z' حيث : $z'=(1+i)z-i\alpha$

0.25 **1)** تحقق من أن : $z'-z=i(z-\alpha)$.

0.5 **2)** استنتج طبيعة المثلث AMM'.

0.25 **3)** حدد ω لحق النقطة Ω الصامدة بالتطبيق F.

0.75 **4)** بين أن F هو مركب دوران r وتحاك h و أعط الكتابة العقدية لكل واحد منهما محددا عناصرهاالمميزة.

5) نضع $\alpha = i$ و نعتبر النقط $A_0(1+i)$ و $A_n(z_n)$ و $A_{n+1}(z_{n+1})$ حيث $F(A_n) = A_{n+1}$ حيث $z_0 = 1+i$

أ) بين أن : $z_{n+1} - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_n - i)$ $(\forall n \in IN)$. 0.5

ب) استنتج أن : $z_n - i = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ $(\forall n \in IN)$. 0.25

ج) حدد قيم n لكي تكون النقط A ,A_0 , A_n مستقيمية. 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

ليكن $n \in IN$ نضع: $p = 11n+2$, $q = 50n+9$ ونعتبر أن : $d = p \wedge q$

1)

أ) **بين** أن: $d = 1$. 0.5

ب) باستعمال خوارزمية اقليدس، حدد حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$: (1) . 0.5

ج) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة (1) . 0.5

2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$, نفترض أن $a \wedge 11 = 1$

أ) حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{10} على 11. 0.5

ب) بين أن : $a^{p+q} \equiv a^{n+1}[11]$. 0.75

ج) حدد قيما للعدد n لكي يكون $a^{p+q} \equiv 1[11]$. 0.25

مسألة : (10ن)

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$ $(\forall n \in IN)$

الجزء I : نأخذ $n = 1$

1) احسب النهايتين : $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f_1(x)$. 0.5

2) أدرس الفروع اللا نهائية لمنحنى الدالة f_1. 0.75

3) أحسب $f_1'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f_1 على $\mathbb{R}^*$. 0.5

4) بين أن h قصور الدالة f_1 على المجال $]0;2[$ تقابل من $]0;2[$ نحو مجال J يجب تحديده. 0.5

5) احسب $f(1)$ و $(h^{-1})'(e-1)$. 0.25

6) أنشئ منحنى الدالة f_1 في معلم متعامد ممنظم. 0.5

الجزء II

1) أدرس تغيرات f_n على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$. 0.5

2) بين أن المعادلة: $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]-\infty;0[$. 0.5

3) ادرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $]-\infty,0[$. 0.25

4) استنتج الوضع النسبي ل (C_n) , (C_{n+1}) على المجال $]-\infty,0[$.	0.25
5) بين أن المتتالية (α_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة .	0.5
6) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.	0.5
7) نضع: $w_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{\alpha_k^2}{k^2}$: $\forall n\in IN^*$ ؛ بين أن المتتالية (w_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة. (لاحظ: $\forall k\geq 2\ ;\ \frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$)	0.5

الجزء III

نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t^2}dt\ \ ;\ \ x\neq 0\\ F(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

1) بين أن F معرفة على IR .	0.25
2)	
أ) بين أن : $(\forall x\geq 0)\ \frac{e^x}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^{2x}}{2}$ وأن $(\forall x\leq 0)\ \frac{e^{2x}}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^x}{2}$.	0.5
ب) استنتج أن F متصلة في الصفر .	0.25
3) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.	0.5
4)	
أ) بين أن : $(\forall x\in IR^*)\ \ F(x)=e^x-\frac{e^{2x}}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
ب) بين أن F قابلة للاشتقاق على $IR^{\bullet}$ وأن $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ F'(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
5)	
أ) بين أن $(\forall x\geq 0)\ e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$ و أن $(\forall x\leq 0)\ e^{2x}\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^x\ln 2$.	0.5
ب) ب- استنتج $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
6)	
أ) تحقق أن : $(\forall x\in IR^*)\ \ F(x)-\frac{1}{2}=-\frac{(e^x-1)^2}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
ب) استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر.	0.25
ج) أعط جدول تغيرات F .	0.25